ЗАДАЧИ ОД СЛОЖЕНА И ИНВЕРЗНА Ф-ЦИЈА

1. Најди ги сложените ф-ции $f \circ g$ и $g \circ f$ ако

а) $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = x^3 + 1$

реш: $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\underbrace{x^3+1}) = 2(x^3+1) - 1 = 2x^3 + 2 - 1 =$

се заменува во f

$= 2x^3 + 1$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = (2x-1)^3 + 1 =$

б) $f(x) = \sin x, \ x \in R$ и $g(x) = x^2, \ x \in R$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2) = \sin x^2$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$

2. Најди ја сложената ф-ција $g \circ f$ ако:

а) $f(x) = \frac{1}{4-x^2}, \quad x \in R \setminus \left\{-2, 2, \sqrt{\frac{9}{2}}\right\}$ и $g(x) = \frac{1}{x+2} \quad x \in R \setminus \{-2, 0\}$

реш: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{4-x^2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{4-x^2} + 2} =$

$= \frac{1}{\frac{1+2(4-x^2)}{4-x^2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1+8-2x^2}{4-x^2}} = \frac{4-x^2}{9-2x^2}$

б) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in (0, \infty)$ и $g(x) = \lg x \quad x \in (0, \infty)$

реш: $g \circ f(x) = g(\sqrt{x}) = \lg \sqrt{x}$

3. Најди ја инверзната ф-ја на функцијата:

а) $y = 2x+3, \quad x \in \mathbb{R}$

реш.

$2x = y-3$

$x = \frac{y-3}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

б) $y = \frac{1}{2}x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$

реш

$y = \frac{1}{2}x - 2 \quad / \cdot 2$

$2y = x - 4$

$x = 2y+4$

$f^{-1}(x) = 2x+4$

в) $y = \frac{x}{x-1} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

реш

$y = \frac{x}{x-1}$

$y(x-1) = x$

$yx - y = x$

$yx - x = y$

$x(y-1) = y$

$x = \frac{y}{y-1}$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$

г) $y = \sqrt{x} - 2 \quad x \in [0, \infty)$

реш

$y = \sqrt{x} - 2$

$y + 2 = \sqrt{x} \quad /(\,)^2$

$(y+2)^2 = \cancel{(\sqrt{x})^2}$

$y^2 + 4y + 4 = x$

$x = y^2 + 4y + 4$

$f^{-1}(x) = x^2 + 4x + 4$

g) $y=\sqrt[3]{x} \quad x\in\mathbb{R}$

реш $y=\sqrt[3]{x} \quad /(\ )^3$

$y^3=(\cancel{\sqrt[3]{x}})^{\cancel{3}}$

$y^3=x$

$x=y^3$

$f^{-1}(x)=x^3$

e) $y=\sqrt[3]{x}+1$

реш $y=\sqrt[3]{x}+1$

$y-1=\sqrt[3]{x} \quad /(\ )^3$

$(y-1)^3=(\cancel{\sqrt[3]{x}})^{\cancel{3}}$

$y^3-3y^2+3y-1=x$

те $f^{-1}(x)=x^3-3x^2+3x-1$

i) $y=\sqrt[3]{x+1}, \quad x\in\mathbb{R}$

реш $y=\sqrt[3]{x+1} \quad /(\ )^3$

$y^3=x+1$

$x=y^3-1$

$f^{-1}(x)=x^3-1$

зл. $y=\frac{3^x+3^{-x}}{2}, \quad x\in\mathbb{R}$

реш. $y=\frac{3^x+3^{-x}}{2} \quad |\cdot 2$

$2y=3^x+3^{-x}$

$2y=3^x+\frac{1}{3^x} \quad |\cdot 3^x$

$2y3^x=(3^x)^2+1$

$(3^x)^2-2y3^x+1=0$

смена $3^x=t$

$t^2-2yt+1=0$

$a=1 \quad b=-2y \quad c=1$

$t_{1/2}=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2-4}}{2}$

$t_{1/2}=\frac{2y\pm\sqrt{4(y-1)}}{2}$

$t_{1/2}=\frac{2y\pm2\sqrt{y-1}}{2}$

$t_{1/2}=\frac{\cancel{2}(y\pm\sqrt{y-1})}{\cancel{2}}$

$t_{1/2}=y\pm\sqrt{y-1}$

Заменување во смената

$3^x=t$

$3^x=y\pm\sqrt{y-1} \quad |\lg$

$\lg 3^x=\lg(y\pm\sqrt{y-1})$

$x\lg 3=\lg(y\pm\sqrt{y-1})$

$x=\frac{\lg(y\pm\sqrt{y-1})}{\lg 3}$

те $f^{-1}(x)=\frac{\lg(x\pm\sqrt{x-1})}{\lg 3}$

или $3^x=y\pm\sqrt{y-1} \quad |\log_3$

$\log_3 3^x=\log_3(y\pm\sqrt{y-1})$

$x\underbrace{\log_3 3}_{1}=\log_3(y\pm\sqrt{y-1})$

$x=\log_3(y\pm\sqrt{y-1})$

те $f^{-1}(x)=\log_3(x\pm\sqrt{x-1})$

4 Најди го множеството вредности на ф-јата:

а) $f(x) = x^3 - 1$

$V_f = D_{f^{-1}}$, па затоа прво ќе го најдеме f^{-1}.

$y = x^3 - 1$

$y + 1 = x^3$

$x = \sqrt[3]{y+1}$

те $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{y+1}$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

па значи $V_f = \mathbb{R}$

б) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$y = \frac{x+1}{x-2}$

$y(x-2) = x+1$

$yx - 2y = x + 1$

$yx - x = 1 + 2y$

$x(y-1) = 1 + 2y$

$x = \frac{1+2y}{y-1}$

те $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-1}$

$D_{f^{-1}} = ?$

$f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-1}$

$x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Значи $V_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

б) $f(x)=\sqrt{x(4-x)}$ $\quad D_f=[0,4]$

реш. прво $f^{-1}(x)=?$

$$y=\sqrt{x(4-x)} \quad /()^2$$

$$y^2=x(4-x)$$

$$y^2=4x-x^2$$

$$x^2+y^2-4x=0$$

те $x^2-4x+y^2=0$

Се доби квадратна р-ка по x, каде

$a=1 \quad b=-4 \quad c=y^2$

$$x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4y^2}}{2}$$

$$x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{4(4-y^2)}}{2}$$

$$x_{1/2}=\frac{4\pm 2\sqrt{4-y^2}}{2}$$

$$x_{1/2}=\frac{\cancel{2}\left(2\pm\sqrt{4-y^2}\right)}{\cancel{2}}$$

$$x_{1/2}=2\pm\sqrt{4-y^2}$$

те $f^{-1}(x)=2\pm\sqrt{4-x^2}$

Значи $f^{-1}(x)=2\pm\sqrt{4-x^2}$

$D_{f^{-1}}=?$

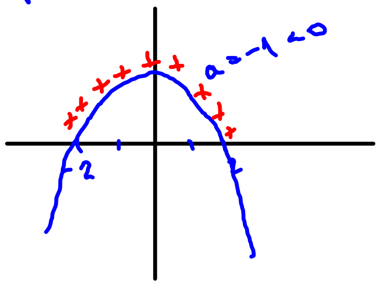
$$4-x^2\geq 0$$

прво ја решаваме р-ката $4-x^2=0$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

потоа ја скицираме параболата $y=4-x^2$



$x\in[-2,2]$

те $D_{f^{-1}}=[-2,2]$

Но f е дефинирана само на $[0,4]$ и на тој интервал постои и f^{-1}

Значи

$$V_f=[-2,2]\cap[0,4]$$

$$V_f=[0,2]$$