

ЗАДАЧИ ОД АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

1. Во една АП $a_1 = -11$ $d = -6$, а еден нејзин член е -185 . Кој член по ред е тоа?

реш. $a_1 = -11$
 $d = -6$
 $a_n = -185$
 $n = ?$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$-185 = -11 + (n-1)(-6)$$

$$-185 = -11 - 6n + 6$$

$$6n = 180$$

$$n = 30 \bullet$$

(триесетти член по ред)

2. Најди ја АП ако $a_1 + a_4 = -22$ и $a_5 = -6$.

реш: $a_1 + a_4 = -22$
 $a_5 = -6$

(Формулата $a_n = a_1 + (n-1)d$ ја змемтуваме во a_4 и a_5)

$$a_1 + \underbrace{a_1 + 3d}_{a_4} = -22$$

$$2a_1 + 3d = -22$$

$$a_1 + 4d = -6$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 4d = -6$$

Поттаму решаваме системот од 2 лн. р-ки со две непознати a_1 и d (со помош на методите)

$$\begin{cases} 2a_1 + 3d = -22 \\ a_1 + 4d = -6 \end{cases} \quad | \cdot (-2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a_1 + 3d = -22 \\ -2a_1 - 8d = 12 \end{cases} \quad | +$$

$$\hline -5d = -10$$

$$d = 2 \bullet$$

$$a_1 + 4 \cdot 2 = -6$$

$$a_1 = -6 - 8$$

$$a_1 = -14 \bullet$$

Значи $a_1 = -14$ и $d = 2$, па АП има:

$$-14, -12, -10, -8, \dots$$

3. Збирот на третиот и шестиот член на една аритметичка прогресија е 20, а разликата на деветтиот и вториот е 7. Најди ја прогресијата.

реш. $a_3 + a_6 = 20$
 $a_9 - a_2 = 7$
 $a_1 = ? \quad d = ?$

Во условите на задачата ја заменуваме формулата $a_n = a_1 + (n-1)d$ за a_3, a_6, a_9 и a_2 те

$$\begin{array}{l} a_3 + a_6 = 20 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ a_1 + 2d + a_1 + 5d = 20 \\ \underline{2a_1 + 7d = 20} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{l} a_9 - a_2 = 7 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ a_1 + 8d - (a_1 + d) = 7 \\ \cancel{a_1} + 8d - \cancel{a_1} - \underline{d} = 7 \\ 7d = 7 \\ d = 1 \end{array}$$

d го заменуваме во првата

$$2a_1 + 7d = 20$$

$$2a_1 + 7 \cdot 1 = 20$$

$$2a_1 = 13$$

$$a_1 = \frac{13}{2}$$

Аритметичката прогресија е:

$$\frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}, \frac{19}{2}, \dots$$

4. Пресметај го збирот на првите 100 парни природни броеви.

реш: 2, 4, 6, 8, ... - парни природни броеви

Ова е АП во која

$$a_1 = 2$$

$$d = 2$$

$$S_{100} = ?$$

За S_{100} ја применуваме формула $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$$\text{т.е. } S_{100} = \frac{100}{2}(2 \cdot 2 + (100-1) \cdot 2)$$

$$S_{100} = 50(4 + 99 \cdot 2)$$

$$S_{100} = 10100 \bullet$$

5. Пресметај го a_1 и S_{22} во една аритметичка прогресија, ако $a_{22} = 30$ и $d = 3$

реш. $a_{22} = 30$

$$d = 3$$

$$a_1 = ?$$

$$S_{22} = ?$$

За a_{22} ја применуваме формула

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{т.е.}$$

$$a_{22} = a_1 + 21d$$

$$30 = a_1 + 21 \cdot 3$$

$$a_1 = -33 \bullet$$

Сега за S_{22} ја применуваме формула:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{т.е.}$$

$$S_{22} = \frac{22}{2}(a_1 + a_{22})$$

$$S_{22} = 11 \cdot (-33 + 30)$$

$$S_{22} = -33 \bullet$$

6. Збирот на првите седум членови на една АП е 77, а збирот на првите десет е 65. Најди ја прогресијата.

реш: $S_7 = 77$
 $S_{10} = 65$
 $a_1 = ?$
 $d = ?$

За S_7 и S_{10} ја применуваме формулата

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$\text{т.е. } S_7 = \frac{7}{2} (2a_1 + 6d) \quad \Leftrightarrow \quad 77 = \frac{7}{2} (2a_1 + 6d)$$

$$\text{и } S_{10} = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d) \quad 65 = 5 (2a_1 + 9d)$$

добиваме две р-ки со две непознати (a_1 и d)
и ги решаваме во систем:

$$\begin{cases} 77 = \frac{7}{2} (2a_1 + 6d) \\ 65 = 5 (2a_1 + 9d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 77 = 7a_1 + 21d & / \cdot 10 \\ 65 = 10a_1 + 45d & / \cdot (-7) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 770 = 70a_1 + 210d \\ -455 = -70a_1 - 315d \end{cases} / +$$

$$315 = -105d$$

$$d = -3$$

Заместуваме во една од р-ките на системот:

$$77 = 2a_1 + 21 \cdot (-3)$$

$$2a_1 = 140$$

$$a_1 = 70$$

Прогресијата има:

$$70, 67, 64, 61, \dots$$

7. Бројот 27 раздели го на три дела кои образуваат АП, така што квадратот на вториот дел е поголем за 16 од производот на другите два дела.

реш: Нека 27 е разделил на делови a_1, a_2, a_3 кои образуваат АП. Појам

$$a_1 + a_2 + a_3 = 27 \quad \text{и}$$

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3 + 16$$

Во овие две равенки за a_2 и a_3 ја користиме формула $a_n = a_1 + (n-1)d$ и се добиваат равенките:

$$\underline{a_1} + \underline{a_1} + d + \underline{a_1} + 2d = 27 \quad (\Rightarrow) \quad 3a_1 + 3d = 27 \quad /:3$$

$$\text{и } (a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 2d) + 16 \quad \Rightarrow \quad \cancel{a_1^2} + 2\cancel{a_1d} + \cancel{d^2} = \cancel{a_1^2} + 2\cancel{a_1d} + 16$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad a_1 + d &= 9 & \text{Или, } d &= 4 & a_1 &= 5 \\ d &= \underline{\pm 4} & \text{Или, } a &= 5, 9, 13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Или, } d &= -4 & a_1 &= 13 \\ \text{Или, } a &= 13, 9, 5, \end{aligned}$$

Итак во сепи случај деловите на бројот 27 се 5, 9, 13.